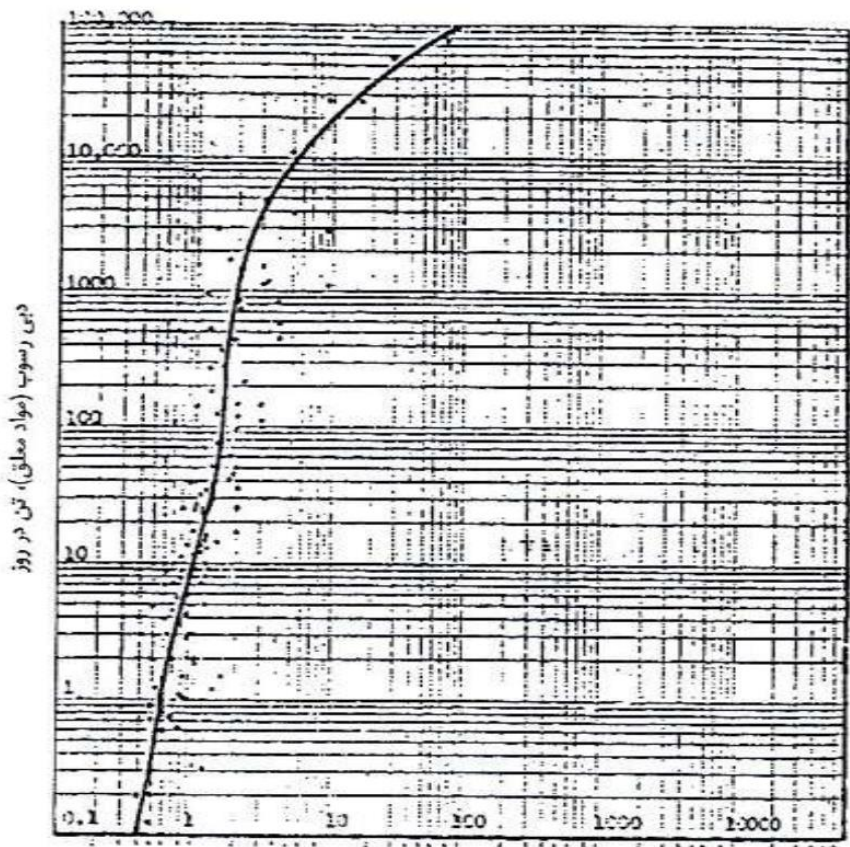


با توجه به نمونه‌های رسوب در ایستگاه رسوب‌سنجی یک حوضه می‌خواهیم مقدار رسوباتی که سالانه وارد مخزن سدی که روی رودخانه این حوضه ساخته شده است محاسبه کنیم. براساس نمونه‌گیری‌های انجام شده که در آن دبی آب و دبی رسوب محاسبه شده است رابطه بین دبی رسوب (مواد معلق) و دبی آب مطابق شکل ۱۹-۸ در یک دستگاه محورهای مختصات لگاریتمی رسم شده است. همچنین منحنی تداوم جریان نیز که در آن تغییرات دبی رودخانه‌ای به ازای احتمالات مختلف رسم شده است، به صورت شکل ۱۹-۹ در اختیار است. این منحنی دبی رودخانه را به ازای احتمالات تجمعی نشان می‌دهد، با فرض این که وزن مخصوص مواد معلق $1/35$ گرم در سانتی‌متر مکعب باشد می‌خواهیم حجم مواد معلق سالانه این رودخانه را بدانیم؟ اگر بار بستر این رودخانه ۳۰ درصد بار معلق در نظر گرفته شود و وزن مخصوص مواد بستر $2/65$ گرم در سانتی‌متر مکعب باشد حجم کل رسوبات سالانه چقدر است؟ چنانچه سطح حوضه 540 کیلومتر مربع باشد دبی ویژه دراز مدت مواد معلق، دبی ویژه بار بستر و دبی ویژه کل مواد جامد این حوضه چقدر است؟

حل

برای محاسبه دبی ویژه دراز مدت جدول ۱۹-۴ را تشکیل می‌دهیم در ستون اول این جدول حدود دسته‌های احتمال (به درصد) نوشته شده است. حدود این دسته‌ها اختیاری است اما سعی می‌شود حدود دسته‌ها در احتمالات بالا کم گرفته شود تا محاسبات دقیقتر باشد. ستون

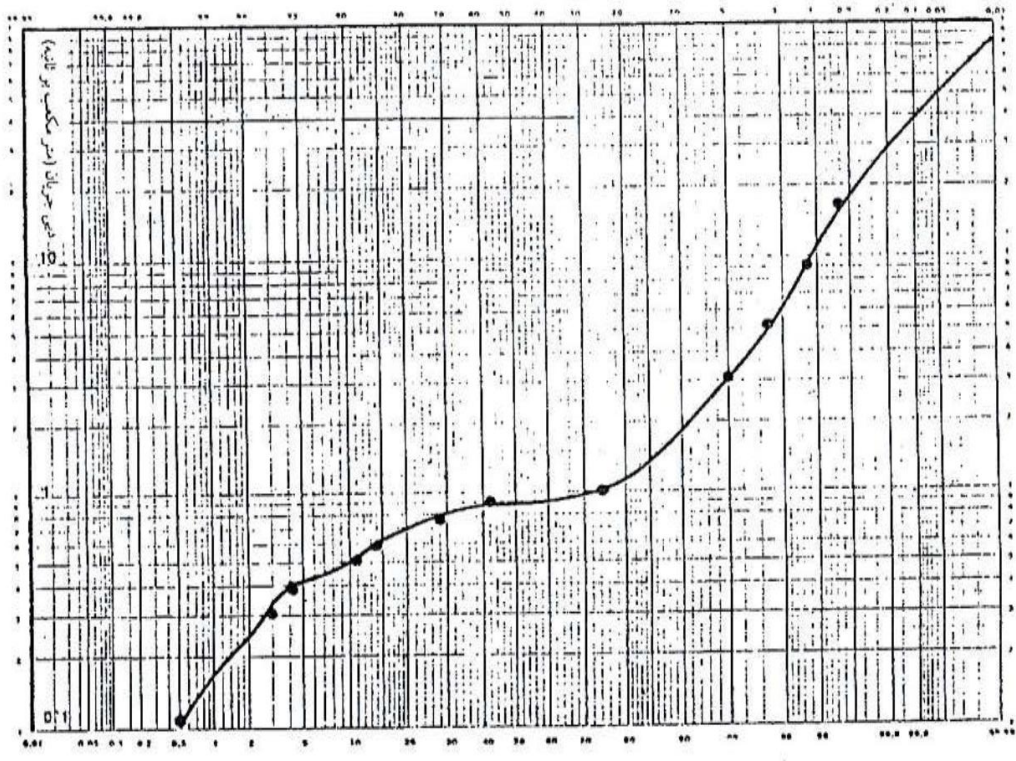
دوم جدول فواصل دسته‌های احتمالاتی را نشان می‌دهد. مثلاً در مورد اول که احتمال $0/01$ تا 40 درصد را نشان می‌دهد فاصله دسته $39/99$ درصد یا $0/3999$ است و در ردیف دوم فاصله دسته $10 = 40 - 30$ درصد یا $0/1$ است. در ستون سوم حد وسط فواصل احتمال به درصد نوشته شده است ($\frac{\text{حد بالا} + \text{حد پایین}}{2}$). مقادیر دبی جریان آب از روی شکل ۱۹-۹ و به ازای احتمال وقوع مربوط به حد وسط دسته‌ها (ستون ۳) استخراج و در ستون ۴ نوشته شده است. ارقام ستون ۵ از حاصلضرب ستون ۲ و ۴ به دست آمده است که در واقع جزء دبی روزانه را در احتمالات مختلف نشان می‌دهد. حاصل جمع این ستون ($1/07$ متر مکعب در ثانیه) دبی عادی روزانه رودخانه می‌باشد. میزان رسوب به ازای دبی‌های مختلف آب (ستون ۴) از شکل ۱۹-۸ (رابطه بین دبی آب و دبی رسوب) استخراج و در ستون ۶ نوشته شده است. ستون ۷ دبی روزانه رسوب را که از حاصلضرب ارقام ستون ۲ و ۶ به دست آمده است نشان می‌دهد. جمع ارقام این ستون مواد معلق روزانه را برحسب تن نشان می‌دهد.



دبی آب متر مکعب در ثانیه

شکل ۸-۱۹ رابطه بین دبی رسوب و دبی جریان آب

احتمال وقوع (کمتر از ۱۰۰)



شماره: ۱۰۱۵۱۱

جدول ۱۹-۴ برآورد بار رسوبی درازمدت

1	2	3	4	5	6	7
			با استفاده از متحنی احتمال دبی آب		با استفاده از متحنی دبی آب دبی رسوب	
حدود دسته‌ها (درصد)	فاصله دسته‌ها	حدوسط دسته‌های احتمال(درصد)	دبی با احتمال وقوع حد وسط دسته‌ها(متر) مکعب در ثانیه)	دبی روزانه (۴×۲) مترمکعب در ثانیه	دبی رسوب به لانه دبی ستون ۴(تن در روز)	رسوب روزانه و سالانه به تن ۲×۶
0.01-40	0.3999	20	0.5	0.19	0.8	0.31
40-50	0.1	45	0.7	0.07	2	0.2
50-60	0.1	55	0.80	0.08	4	0.4
60-70	0.1	65	0.90	0.09	7	0.7
70-80	0.1	75	1.0	0.01	10	1
80-90	0.1	85	1.3	0.13	21	2.1
90-95	0.05	92.5	2.4	0.12	2000	100
95-98	0.03	96.5	4.0	0.12	6500	195
98-99	0.01	98.5	8.0	0.08	18000	180
99-99.8	0.008	99.4	15	0.12	25000	200
99.8-99.9	0.001	99.85	30	0.03	50000	50
99.9-99.99	0.0009	99.945	43	0.03	60000	54
جمع روزانه				1.07		784

بطوری که از جدول ۱۹-۴ نتیجه‌گیری می‌شود دبی روزانه این رودخانه بطور عادی ۱/۰۷ مترمکعب در ثانیه و مقدار رسوبات معلق روزانه ۷۸۴ تن می‌باشد. حال به محاسبات دیگر می‌پردازیم.

میلیون مترمکعب $33/7 = 1/07 \times 365 \times 86400 \times 10^{-6}$ = حجم متوسط درازمدت سالانه آب

تن در سال $784 \times 365 = 286160$ = وزن متوسط درازمدت مواد معلق

تن در سال در کیلومتر مربع $286160 \div 540 = 530$ = مقدار مواد معلق حاصله از هر کیلومتر مربع از حوضه

تن در سال $286160 \times 0/3 = 85848$ = مقدار متوسط درازمدت مواد بستر

تن در سال در کیلومتر مربع $85848 \div 540 = 159$ = دبی ویژه درازمدت مواد بستر در هر کیلومتر مربع از حوضه

تن در سال در کیلومتر مربع $(530 + 159 = 689)$ = دبی ویژه درازمدت کل مواد رسوبی

$$\text{مترمکعب} = \frac{286160}{1/35} = 211970 \text{ مترمکعب}$$

$$\text{مترمکعب} = \frac{85848}{2/65} = 32395 \text{ مترمکعب}$$

$$\text{مترمکعب} = 211970 + 32395 = 244365 \text{ مترمکعب}$$

ملاحظه می شود که اگر روی این رودخانه سد احداث گردد هر سال 244365 مترمکعب رسوب وارد مخزن این سد خواهد شد و اگر بخواهیم این سد مدت 50 سال عمر داشته باشد لازم است $12/22 = (244365 \times 50)$ میلیون مترمکعب حجم مرده برای آن در نظر گرفته شود.

بر اساس داده‌های موجود از یک محل احتمال این که در روزهای ماه خرداد بارندگی وجود داشته باشد ۲۰ درصد است. قرار است در این محل یک کار ساختمانی انجام شود که لازم است در طول ۵ روز هیچ گونه بارانی وجود نداشته باشد. احتمال این که در طی ۵ روز پیاپی در ماه خرداد باران وجود نداشته باشد چقدر است؟ احتمال این که در طی ۵ روز فقط یک روز بارندگی وجود داشته باشد چقدر خواهد بود؟

حل:

الف - برای آن که در طی ۵ روز هیچ روز بارانی وجود نداشته باشد

$$n = 5$$

$$p = 0.2$$

$$q = 1 - P = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$x = 0$$

$$P(x=0) = ?$$

$$P_{(x=0)} = \left\{ \frac{n!}{x! (n-x)!} \right\} p^x q^{n-x}$$

$$P_{(x=0)} = \left\{ \frac{5!}{[0! (5-0)!]} \right\} (0.2)^0 (0.8)^{5-0}$$

$$P_{(x=0)} = 0.328$$

بنابراین با ۳۲/۸ درصد در ماه خرداد در ۵ روز پیاپی هیچ گونه بارندگی روزانه وجود نخواهد داشت.

ب - برای آن که در طول ۵ روز فقط یک روز بارندگی داشته باشیم

$$n = 5$$

$$P = 0.2$$

$$q = 0.8$$

$$x = 1$$

$$P_{(x=1)} = ?$$

$$P_{(x=1)} = \left\{ \frac{5!}{[1! (5-1)!]} \right\} (0.2)^1 (0.8)^{5-1}$$

$$P_{(x=1)} = 0.41$$

لذا احتمال این که در طی ۵ روز یک روز آن بارانی باشد ۴۱ درصد است.

● مثال ۱۷-۱۰

در یک منطقه آمار ۸۰ سال بارندگی وجود دارد. بررسی این داده‌ها نشان می‌دهد که احتمال این که مقدار حداکثر بارش ۲۴ ساعته از ۳۰ میلی‌متر تجاوز کند ۰/۰۲ است (۲ درصد). حساب کنید در طی ۱۰ سال آینده احتمال این که ۳ بارش ۲۴ ساعته وجود داشته باشد که مقدار هر یک از آنها از ۳۰ میلی‌متر تجاوز کند چقدر است؟

حل:

$$P = 0.02$$

$$n = 10$$

$$x = 3$$

$$\lambda = P.n = (0.02) (10) = 0.2$$

$$P_{(x=3)} = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0.2)^3 (e)^{-0.2}}{3!} = 0.0011$$

بنابراین فقط ۰/۱۱ درصد احتمال خواهد داشت که در طول ۱۰ سال آینده ۳ بارش ۲۴ ساعته بالاتر از ۳۰ میلی‌متر داشته باشیم.

داده‌های جدول ۱۷-۱۳ از بارندگی یک حوضه در اختیار است اولاً با چه احتمالی مقدار بارندگی ۴۵ سانتی متر یا بیشتر خواهد بود ثانیاً برازش دو توزیع نرمال و گاما را مقایسه کنید.

حل

الف - داده‌ها را به ترتیب نزولی ردیف می‌کنیم. (ستون دوم جدول ۱۷-۱۳)

ب - به هر کدام شماره ردیف (III) داده شود (ستون سوم جدول ۱۷-۱۳)

ج - از روی فرمول تجربی ویبول (فرمول ۱۷-۳۲) احتمال تجربی وقوع را بدست می‌آوریم (ستون ۴ جدول ۱۷-۱۳)

د - نقاط ستون‌های ۲ و ۴ را نسبت به روی یک کاغذ احتمال نرمال مشخص می‌کنیم.

ه - چون نقاط در امتداد یک خط مستقیم قرار می‌گیرند از بین آنها خط مذکور را می‌گذرانیم. و - به لحاظ ظاهر داده‌ها از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند.

ز - برای ۴۵ سانتی متر بارندگی احتمال وقوع ۰.۲۸ یا دوره برگشت ۳/۶ سال می‌باشد.

برای مقایسه درجه برازش دو توزیع نرمال و گاما جدول ۱۷-۱۴ را تشکیل می‌دهیم. ستون‌های این جدول به شرح زیر است:

الف - ستون سوم ارقام مربوط به بارندگی است (PPT) که بصورت نزولی ردیف شده‌اند. ستون دوم شماره هر ردیف و ستون اول سال‌های وقوع می‌باشد.

ب - ستون چهارم احتمال تجربی است که برای هر کدام از داده‌ها از فرمول ویبول محاسبه شده است.

ج - ستون پنجم احتمال مربوط به هر یک از مقادیر بارندگی است که از توزیع تئوری نرمال محاسبه شده‌اند.

برای این منظور ابتدا میانگین $\bar{x}=41.28$ و انحراف از معیار داده‌ها ($S = 6.49$) محاسبه شده‌اند و سپس با استفاده از فرمولی که در معادله ۱۷-۴۳ و شکل ۱۷-۱۶ برای توزیع نرمال داده شده است مقادیر احتمال تئوری به ازاء هر یک از مقادیر بارندگی ستون سوم محاسبه شده‌اند.

د - ارقام ستون ششم تفاوت بین احتمال تجربی (ستون ۴) و احتمال تئوری نرمال (ستون ۵) می‌باشد (D).

ه - ارقام ستون هفتم احتمال تئوری توزیع گاما با توجه به فرمول‌های این روش می‌باشد. برای استفاده از این توزیع پارامترهای λ و β مورد نیاز بوده است که مقادیر آنها عبارت خواهند بود از:

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{S^2} = 0.98 \quad \text{و} \quad \beta = \frac{\bar{x}^2}{S^2} = 40.45$$

و - ارقام ستون ۸ تفاوت احتمال تجربی و احتمال محاسبه شده با توزیع گاما می‌باشد.

حداکثر اختلاف (D) در توزیع گاما به مقدار ۰/۰۷۵ و مربوط به ردیف ۱۲ می‌باشد

جدول ۱۷-۱۳ تحلیل فراوانی داده‌های بارندگی

سال	بارندگی ردیف شده (inches)	ردیف (m)	فراوانی نمونه‌ها $F_r = [m / (n + 1)]$
1983	54.41	1	0.026
1979	52.79	2	0.051
1975	52.13	3	0.077
1972	49.63	4	0.103
1977	49.42	5	0.128
1953	48.13	6	0.154
1958	47.87	7	0.179
1971	47.79	8	0.205
1973	46.06	9	0.231
1978	45.95	10	0.256
1956	45.90	11	0.282
1952	45.84	12	0.308
1967	44.82	13	0.333
1984	43.66	14	0.359
1969	43.36	15	0.385
1962	42.63	16	0.410
1951	42.06	17	0.436
1960	41.15	18	0.462
1961	41.05	19	0.487
1950	40.47	20	0.513
1982	40.43	21	0.538
1986	40.42	22	0.564
1966	40.00	23	0.590
1970	39.14	24	0.615
1980	38.80	25	0.641
1959	38.37	26	0.667
1981	37.83	27	0.692
1974	37.78	28	0.718
1968	35.45	29	0.744
1985	35.20	30	0.769
1963	34.95	31	0.795
1954	34.04	32	0.821
1987	33.40	33	0.846
1976	33.27	34	0.872
1955	33.03	35	0.897
1957	32.20	36	0.923
1964	29.88	37	0.949
1965	29.34	38	0.974

$(D_{max} = 0.075)$ حداکثر اختلاف در توزیع نرمال 0.071 و مربوط به ردیف ۲۹ می‌باشد. در جدول ۱۷-۱۲ به ازاء $n = 38$ و $\alpha = 0.05$ مقدار بحرانی D برابر 0.14 بدست می‌آید. چون D_{max} در هر دو توزیع نرمال و گاما کمتر از 0.14 است لذا فرض صفر در مورد هر دو توزیع قابل قبول می‌باشد. به عبارت دیگر داده‌ها هم از توزیع نرمال و هم از توزیع گاما تبعیت می‌کنند. ولی اگر متوسط تفاوت‌ها را (D) در دو توزیع محاسبه کنیم مشاهده خواهد شد که متوسط D برای توزیع نرمال 0.23 و برای توزیع گاما 0.24 است و لذا نکوئی برازش داده‌ها با توزیع نرمال کمی بهتر از توزیع گاما می‌باشد.

جدول ۱۷-۱۴ آزمون نکوتنی برازش کلموگروف - اسمیرنوف برای داده‌های بارندگی با دو توزیع نرمال و گاما.

سال	ردیف	PPT بارندگی	فراوانی	توزیع نرمال		توزیع گاما	
				<i>D</i>	<i>D</i>		
1983	1	54.41	0.026	0.022	0.004	0.029	0.004
1979	2	52.79	0.051	0.038	0.013	0.046	0.005
1975	3	52.13	0.077	0.048	0.029	0.056	0.021
1972	4	49.63	0.103	0.099	0.003	0.104	0.001
1977	5	49.42	0.128	0.105	0.023	0.109	0.019
1953	6	48.13	0.154	0.146	0.008	0.146	0.008
1958	7	47.87	0.179	0.155	0.024	0.155	0.025
1971	8	47.79	0.205	0.158	0.047	0.157	0.048
1973	9	46.06	0.231	0.231	0.000	0.223	0.008
1978	10	45.95	0.256	0.236	0.020	0.228	0.028
1956	11	45.90	0.282	0.238	0.044	0.230	0.052
1952	12	45.84	0.308	0.241	0.066	0.233	0.075
1967	13	44.82	0.333	0.293	0.041	0.280	0.053
1984	14	43.66	0.359	0.357	0.002	0.340	0.019
1969	15	43.36	0.385	0.374	0.010	0.357	0.028
1962	16	42.63	0.410	0.417	0.007	0.398	0.012
1951	17	42.06	0.436	0.452	0.016	0.432	0.004
1960	18	41.15	0.462	0.508	0.046	0.487	0.025
1961	19	41.05	0.487	0.514	0.027	0.493	0.006
1950	20	40.47	0.513	0.549	0.036	0.529	0.016
1982	21	40.43	0.538	0.552	0.013	0.531	0.007
1986	22	40.42	0.564	0.552	0.012	0.532	0.032
1966	23	40.00	0.590	0.578	0.012	0.558	0.032
1970	24	39.14	0.615	0.629	0.013	0.611	0.005
1980	25	38.80	0.641	0.648	0.007	0.631	0.010
1959	26	38.37	0.667	0.672	0.006	0.657	0.009
1981	27	37.83	0.692	0.712	0.020	0.700	0.008
1974	28	37.78	0.718	0.705	0.013	0.692	0.026
1968	29	35.45	0.744	0.815	0.071	0.813	0.069
1985	30	35.20	0.769	0.825	0.056	0.824	0.055
1963	31	34.95	0.795	0.835	0.040	0.835	0.040
1954	32	34.04	0.821	0.867	0.047	0.871	0.051
1987	33	33.40	0.846	0.887	0.041	0.893	0.047
1976	34	33.27	0.872	0.891	0.019	0.898	0.026
1955	35	33.03	0.897	0.898	0.000	0.905	0.008
1957	36	32.20	0.923	0.919	0.004	0.928	0.005
1964	37	29.88	0.949	0.960	0.011	0.971	0.022
1965	38	29.34	0.974	0.967	0.008	0.977	0.003

● مثال ۱۷-۱۱

میانگین و انحراف از معیار داده‌های بارندگی سالانه یک حوضه به ترتیب $41/28$ و $6/49$ سانتی متر است اگر فرض کنیم توزیع تئوری نرمال با داده‌های مشاهده شده منطبق باشد با استفاده از تابع تئوری نرمال حساب کنید:

- الف - با چه احتمالی مقدار بارندگی سالانه از ۴۵ سانتی متر کمتر خواهد بود.
- ب - با چه احتمالی مقدار بارندگی سالانه بین ۴۳ و ۴۵ سانتی متر خواهد بود.
- ج - با چه احتمالی بارندگی سالانه از ۳۵ سانتی متر کمتر خواهد بود.
- د - با چه احتمالی دقیقاً در هر سال ۳۵ سانتی متر بارندگی خواهیم داشت.

حل

الف -

$$\bar{x} = 41.28$$

$$S = 6.49$$

$$x_i = 45$$

$$Z = \frac{45 - 41.28}{6.49}$$

$$Z = 0.57$$

از جدول ۱۷-۱۰ به ازاء $Z = 0.57$ مقدار احتمال تجمع می‌آید. لذا با احتمال $71/57$ درصد مقدار بارندگی در هر سال کمتر از ۴۵ سانتی متر خواهد بود.

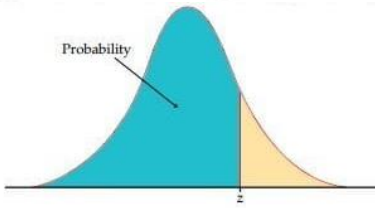


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

TABLE A
Standard normal probabilities (continued)

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
		0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	
		0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	

ب - مقادیر Z به ازاء ۴۵ و ۴۳ سانتی متر بارندگی ۰/۵۷ و ۰/۲۷ خواهد بود که مقادیر احتمال متناظر آن‌ها از جدول ۱۷-۱۰ به ترتیب ۰/۷۱۵۷ و ۰/۶۰۶۴ بدست می‌آید لذا احتمال این که بارندگی سالانه بین ۴۵ و ۴۳ سانتی متر باشد تفاسیل دو رقم فوق یعنی ۱۰/۹ درصد است. زیرا:

$$p(43 < x < 45) = 71.57 - 60.64$$

$$p(43 < x < 45) = 10.9$$

ج - به ازاء ۳۵ سانتی متر بارندگی مقدار Z عدد منفی خواهد بود زیرا:

$$Z = \frac{35 - 41.28}{6.49}$$

$$Z = -0.97$$

چون Z منفی است ابتدا به ازاء ۰/۹۷ مقدار احتمال را بدست آورید (که برابر ۰/۸۳۴۰ خواهد بود). سپس آن را از یک کسر کنید تا احتمال مربوطه محاسبه شود. در این صورت احتمال این که بارندگی سالانه از ۳۵ سانتی متر کمتر باشد ۰/۱۶۶ یا ۱۶/۶ درصد است. زیرا:

$$p(x < 35) = 1 - 0.834 = 0.166$$

د - برای بدست آوردن این که با چه احتمالی بارندگی دقیقاً ۳۵ سانتی متر باشد بهمان

روش بند ب عمل می‌شود که عبارت خواهد بود از:

$$p(35 < x < 35) = 0.166 - 0.166$$

$$p(35 < x < 35) = 0$$

بنابراین توزیع احتمال نرمال مانند دیگر توزیع‌های پیوسته احتمال این که دقیقاً یک مقدار مشخص اتفاق افتد صفر است زیرا روی منحنی توزیع احتمال بی نهایت نقطه وجود دارد و اگر بخواهیم احتمال وقوع آن را محاسبه کنیم مقدار آن $\frac{1}{\infty}$ خواهد شد که مساوی صفر است ولی در توزیع‌های گسسته امکان این که برای هر متغیر احتمال وقوع آن را حساب کنیم وجود دارد.

● مثال ۱۷-۱۴

ریسک وقوع حداکثر لحظه‌ای سیل سالانه با دوره بازگشت ۲۰ سال در ۳ سال آینده چقدر است.

$$P = 1/T = 1/20 = 0.05$$

$$n=3$$

$$J = 1 - (1 - 0.05)^3 = 14.3\%$$

در مثال فوق محاسبه شد که ۱۴ درصد (یا کمی بیشتر) احتمال وجود دارد که سیلابی با دوره برگشت ۲۰ سال در طی ۳ سال آینده یکبار رخ دهد. بهمین ترتیب اگر احتمال این را که یک واقعه ۱۰۰ ساله ($p = 0.01$) در طی ۱۰۰ سال آینده ($n = 100$) حداقل یکبار رخ دهد محاسبه کنیم ریسک ۶۳ درصد خواهد بود که کمتر از متوسط آن یعنی یک بار در هر ۱۰۰ سال می‌باشد.

$$J = 1 - (1 - 0.01)^{100} = 0.63$$